

**CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI**

A.A. 2023-2024

Esame scritto del 01.07.2024

Parte 1 - Testo 1

*Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soliti fogli a quadretti che sono stati forniti. Esprimere i risultati in forma frazionaria o con almeno 3 cifre decimali.*

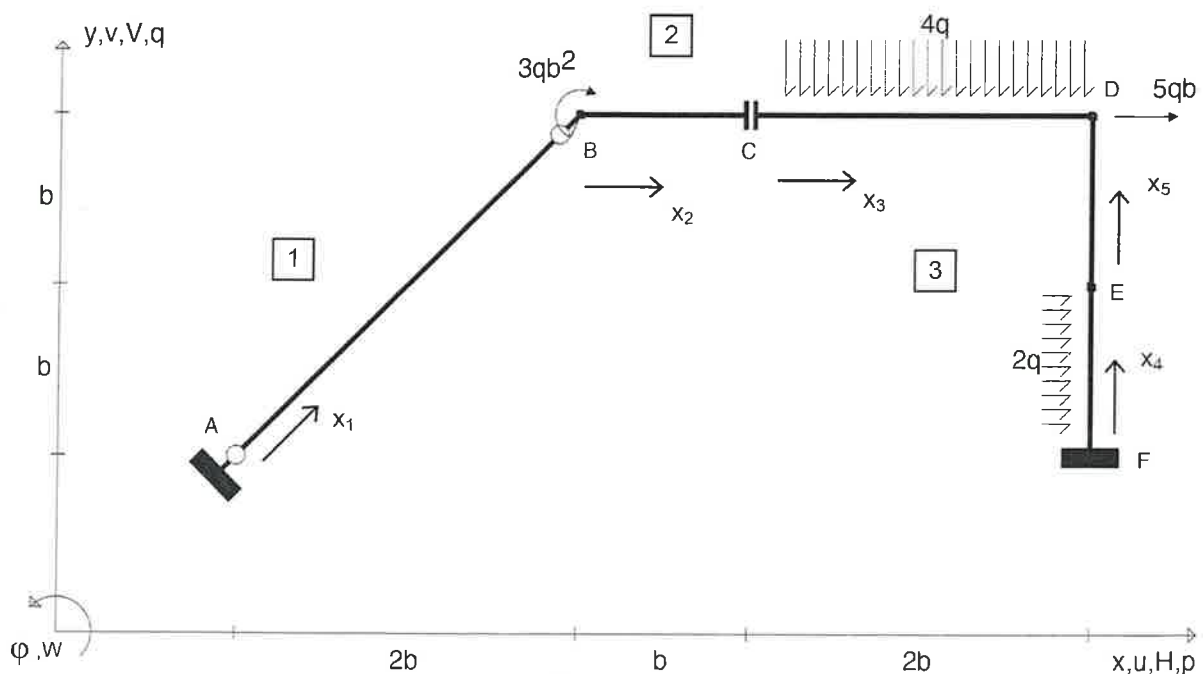
Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

**Esercizio n. 1** (17 punti)

Risolvere la struttura isostatica riportata in Figura calcolando le reazioni vincolari, le *equazioni* delle azioni interne e tracciando nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici. Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC\_SdA 01.07.24\*001



Eq. ausiliarie  $M_{z(B)}^{(1)} = 0$  oppure  $M_{z(B)}^{(2+3)} = 0$

$R_y^{(1+2)} = 0$  oppure  $R_y^{(3)} = 0$

## Esercizio n. 2 (11 punti)

Per la struttura, indicata in Figura, determinare la reazione vincolare  $M_D$  applicando il principio dei lavori virtuali (PLV). Si richiede di

1. Determinare le coordinate (riferite all'origine in  $A$ ) del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 1 (asta  $ABC$ ),  $C_1$ , del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 2 (asta  $CD$ ),  $C_2$ , del centro di istantanea rotazione relativo fra i due corpi,  $C_{12}$ ;
2. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
3. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente verticale dello spostamento virtuale del punto  $C$ ,  $v_C$ , e quella orizzontale dello spostamento virtuale del punto  $A$ ,  $u_A$ .

Calcolare poi, riapplicando il PLV, il valore del momento flettente nel punto  $B$ ,  $M_B$ .

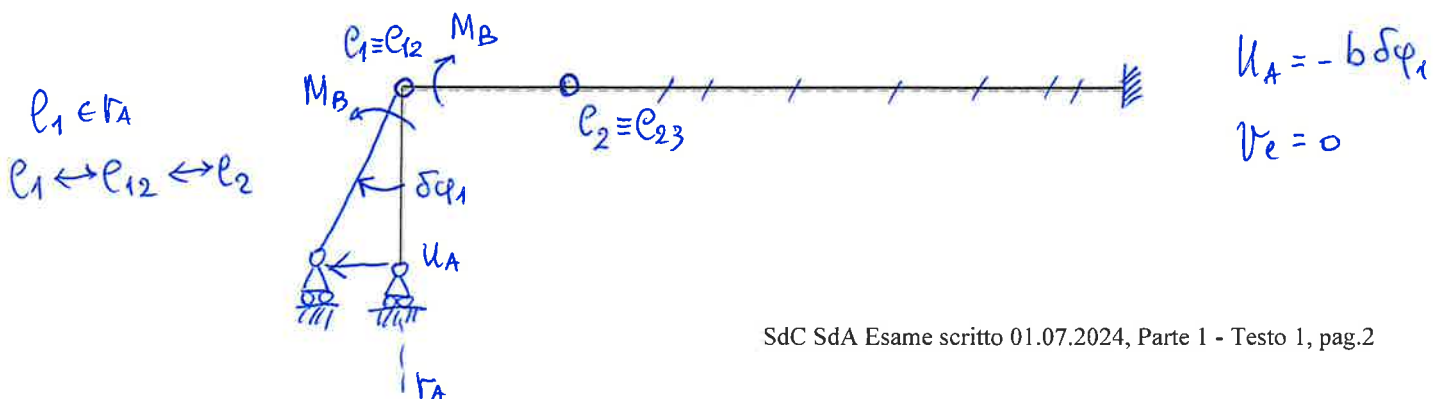
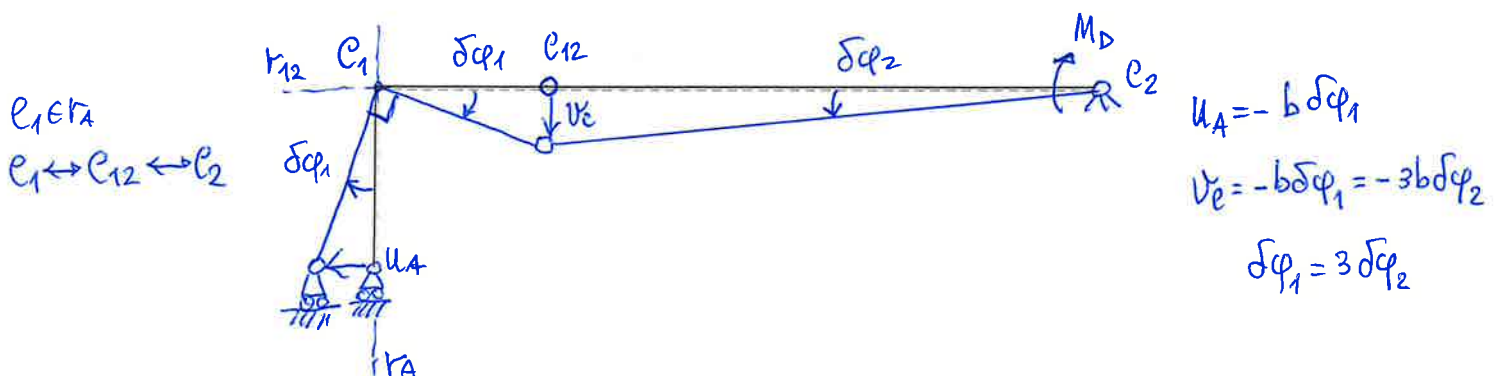
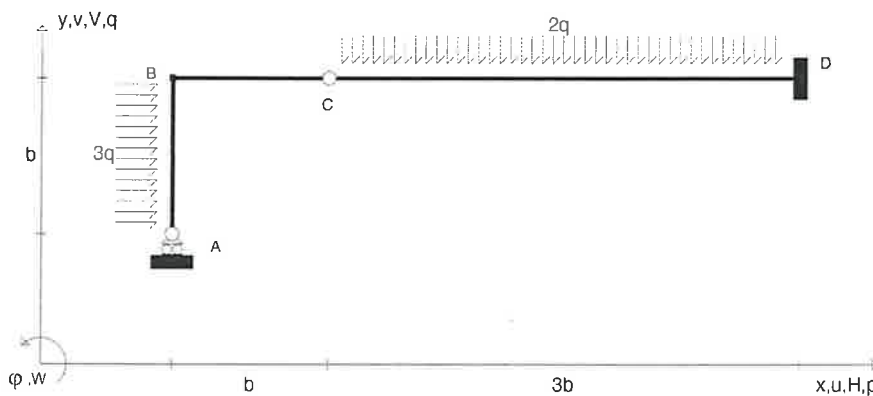
In questa situazione (nella quale la struttura è suddivisa nelle tre aste  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ) si richiede di:

4. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
5. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente verticale dello spostamento virtuale del punto  $C$ ,  $v_C$ , e quella orizzontale dello spostamento virtuale del punto  $A$ ,  $u_A$ .

Nota: Nel caso di punti impropri, si indichino le coordinate dei centri di rotazione in questa forma:  $(\infty, m)$ , dove  $m$  è il coefficiente angolare della retta a cui appartiene il punto improprio.

Universita' di Cagliari

SdC\_SdA 01.07.24\*004



$$M_D(\varphi) = -\frac{1}{2} q b^2; C_1 = (0, b); C_2 = (4b, b); C_{12} = (b, b);$$

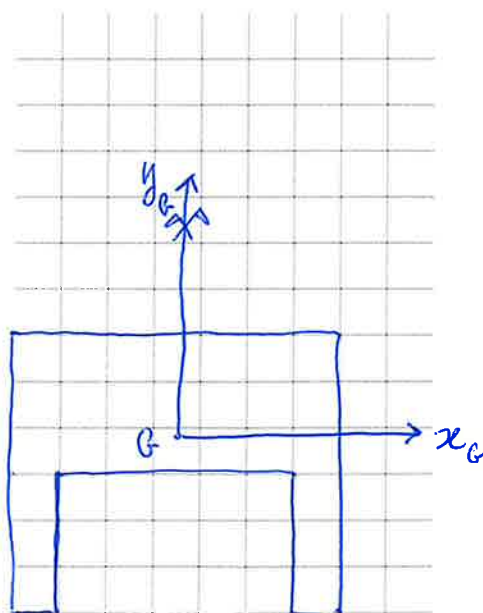
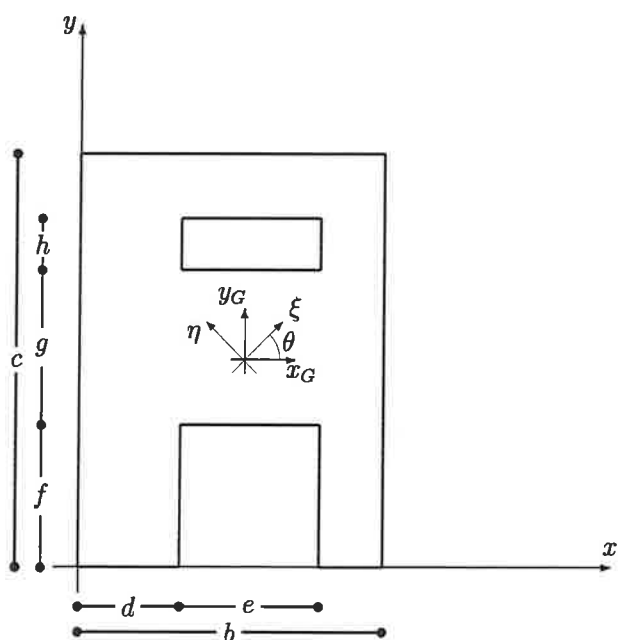
$$v_C = -b\delta\varphi_1 = -3b\delta\varphi_2; u_A = -b\delta\varphi_1;$$

$$M_B(\varphi) = -\frac{3}{2} q b^2; v_C = 0; u_A = -b\delta\varphi_1;$$

### Esercizio n. 3 (5 punti)

Per la lamina piana omogenea rappresentata in Figura (NB: Si noti che il disegno non è in scala!) nella quale le misure quotate sono le seguenti:  $b = 7a$ ;  $c = 6a$ ;  $d = a$ ;  $e = 5a$ ;  $f = 3a$ ;  $g = 3a$ ;  $h = 0$  si richiede di:

- calcolare i momenti statici,  $S_x$  e  $S_y$  (rispetto agli assi  $x$  e  $y$  indicati);
- calcolare le coordinate del baricentro  $x_G$  e  $y_G$  rispetto ai medesimi assi;
- calcolare i momenti di inerzia  $J_{xG}$  e  $J_{yG}$  e il momento centrifugo  $J_{xGyG}$  rispetto agli assi baricentrici;
- calcolare i momenti centrali d'inerzia,  $J_\xi = J_{\max}$  e  $J_\eta = J_{\min}$  rispetto agli assi centrali d'inerzia,  $\xi$ ,  $\eta$ ;
- calcolare la tangente trigonometrica,  $\tan 2\theta$ , del doppio dell'angolo  $\theta$  formato dagli assi  $x_G$  e  $\xi$ .



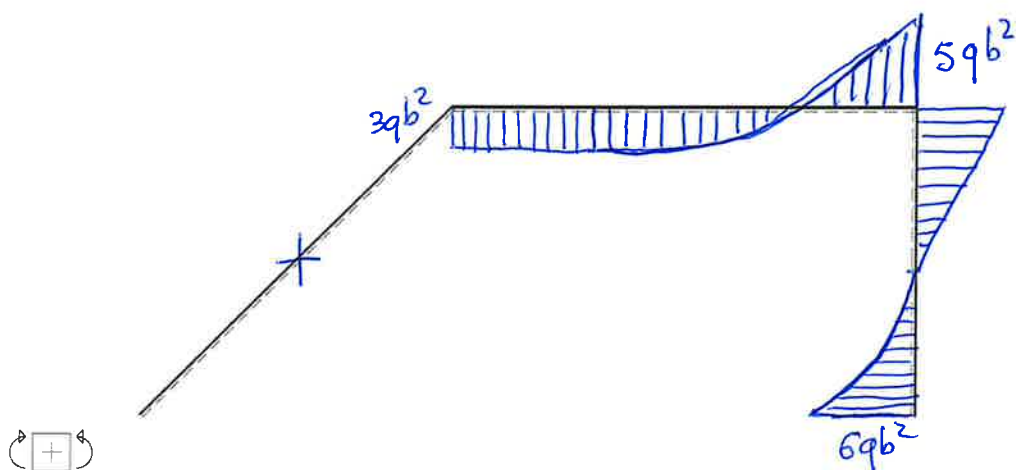
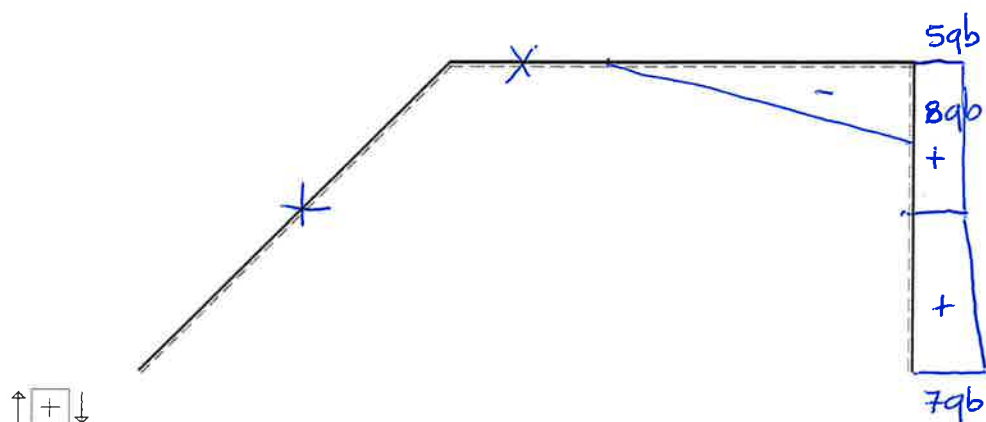
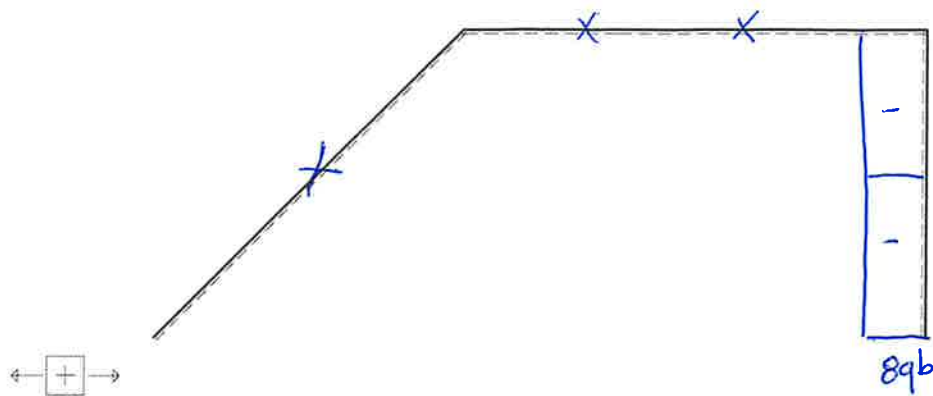
$$S_x = \frac{207}{2} a^3 = 103.5000 a^3; S_y = \frac{189}{2} a^3 = 94.5000 a^3;$$

$$x_G = \frac{7}{2} a = 3.5000 a; y_G = \frac{23}{6} a = 3.8333 a;$$

$$J_{xG} = \frac{249}{4} a^4 = 62.2500 a^4; J_{yG} = \frac{561}{4} a^4 = 140.2500 a^4;$$

$$J_{xGyG} = 0; \tan 2\theta = 0;$$

$$J_\xi = J_{\max} = \frac{561}{4} a^4; J_\eta = J_{\min} = \frac{249}{4} a^4;$$



$$\begin{aligned}
 H_A(\Rightarrow) &= 0; & V_A(\uparrow) &= 0; & H_F(\Rightarrow) &= -7qb; & V_F(\uparrow) &= 8qb; & M_F(\curvearrowright) &= 6qb^2; \\
 N_{AB} &= 0; & T_{AB} &= 0; & M_{AB} &= 0; \\
 N_{BC} &= 0; & T_{BC} &= 0; & M_{BC} &= 3qb^2; \\
 N_{CD} &= 0; & T_{CD} &= -4qx_3; & M_{CD} &= 3qb^2 - 2qx_3^2; \\
 N_{FE} &= -8qb; & T_{FE} &= 7qb - 2qx_4; & M_{FE} &= 6qb^2 - 7qb x_4 + qx_4^2; \\
 N_{ED} &= -8qb; & T_{ED} &= 5qb; & M_{ED} &= -5qb x_5;
 \end{aligned}$$

**CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI**

A.A. 2023-2024

Esame scritto del 01.07.2024

Parte 1 - Testo 2

*Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti. Esprimere i risultati in forma frazionaria o con almeno 3 cifre decimali.*

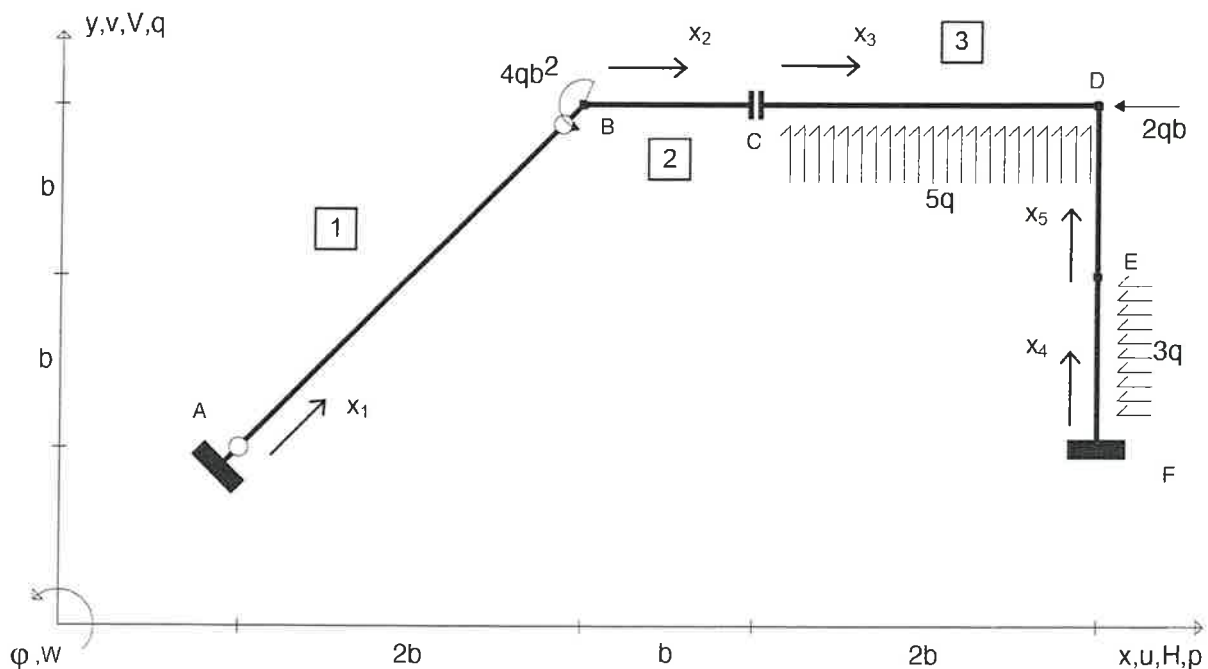
Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

**Esercizio n. 1 (17 punti)**

Risolvere la struttura isostatica riportata in Figura calcolando le reazioni vincolari, le *equazioni* delle azioni interne e tracciando nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici. Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC\_SdA 01.07.24\*002



Eq. ausiliarie

$$M_{z(B)}^{(1)} = 0 \quad \text{oppure} \quad M_{z(B)}^{(2+3)} = 0$$

$$R_y^{(1+2)} = 0 \quad \text{oppure} \quad R_y^{(3)} = 0$$

## Esercizio n. 2 (11 punti)

Per la struttura, indicata in Figura, determinare la reazione vincolare  $M_D$  applicando il principio dei lavori virtuali (PLV). Si richiede di

1. Determinare le coordinate (riferite all'origine in A) del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 1 (asta  $ABC$ ),  $C_1$ , del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 2 (asta  $CD$ ),  $C_2$ , del centro di istantanea rotazione relativo fra i due corpi,  $C_{12}$ ;
2. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
3. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente verticale dello spostamento virtuale del punto  $C$ ,  $v_C$ , e quella orizzontale dello spostamento virtuale del punto  $A$ ,  $u_A$ .

Calcolare poi, riapplicando il PLV, il valore del momento flettente nel punto  $B$ ,  $M_B$ .

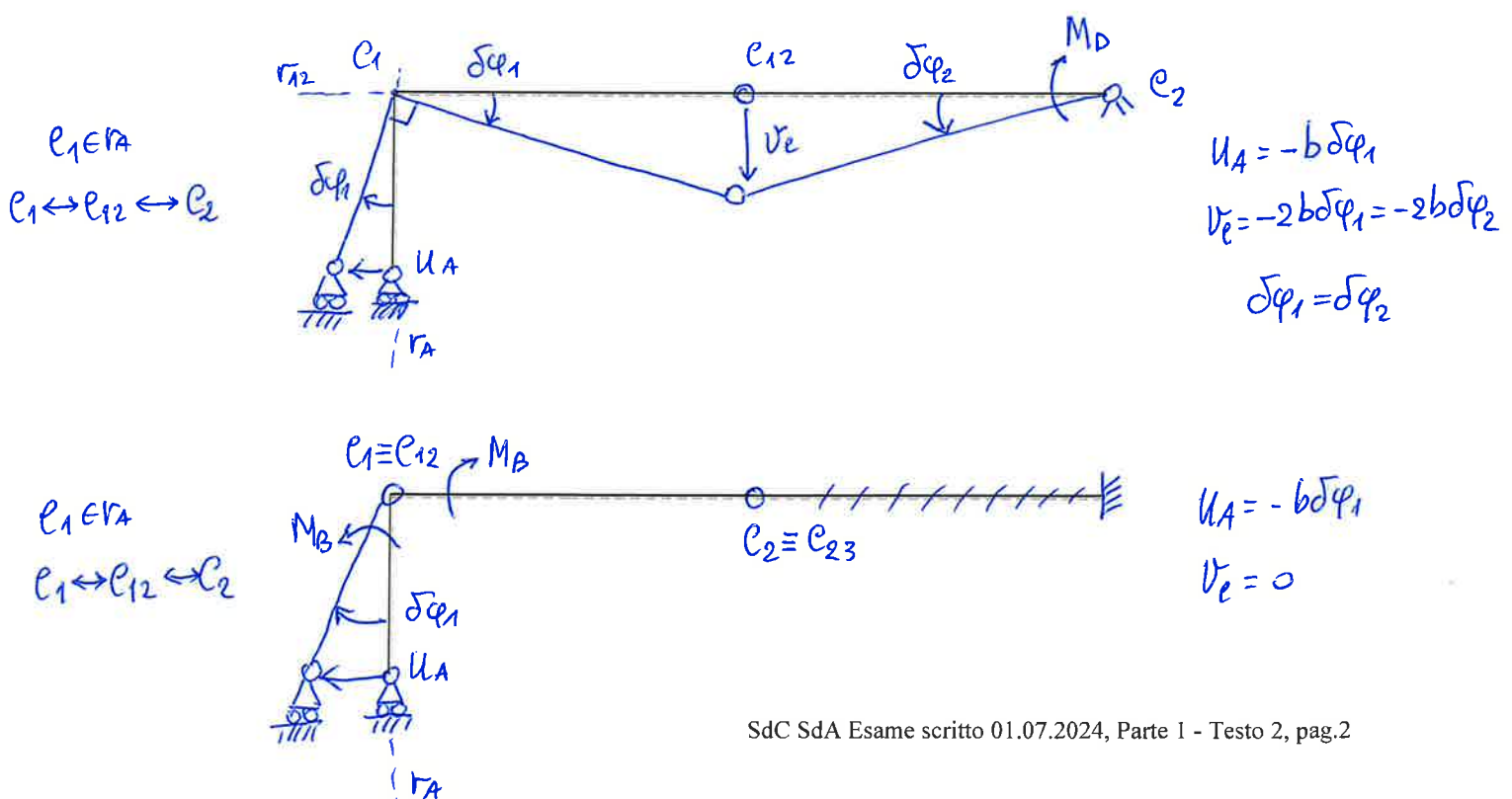
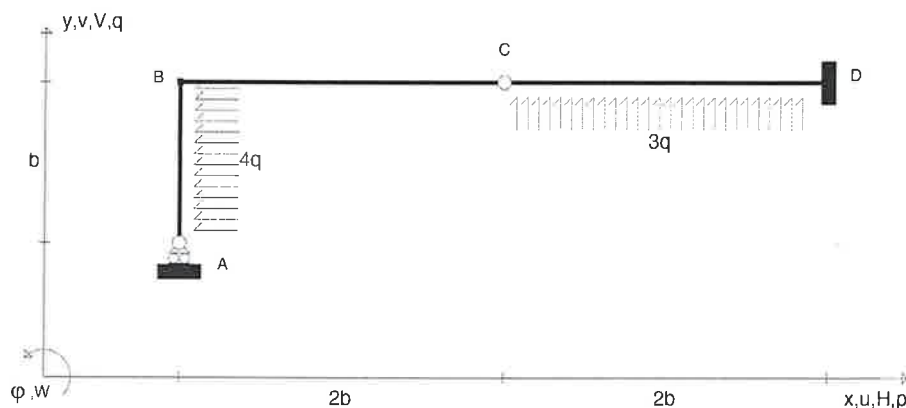
In questa situazione (nella quale la struttura è *suddivisa nelle tre aste*  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ) si richiede di:

4. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
5. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente verticale dello spostamento virtuale del punto  $C$ ,  $v_C$ , e quella orizzontale dello spostamento virtuale del punto  $A$ ,  $u_A$ .

Nota: Nel caso di punti impropri, si indichino le coordinate dei centri di rotazione in questa forma:  $(\infty, m)$ , dove  $m$  è il coefficiente angolare della retta a cui appartiene il punto improprio.

Universita' di Cagliari

SdC\_SdA 01.07.24\*005





$$M_D(\varphi) = 49b^2; C_1 = (0, b); C_2 = (4b, b); C_{12} = (2b, b);$$

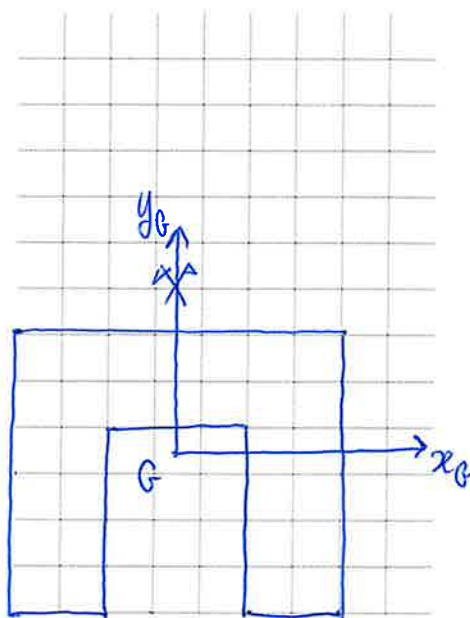
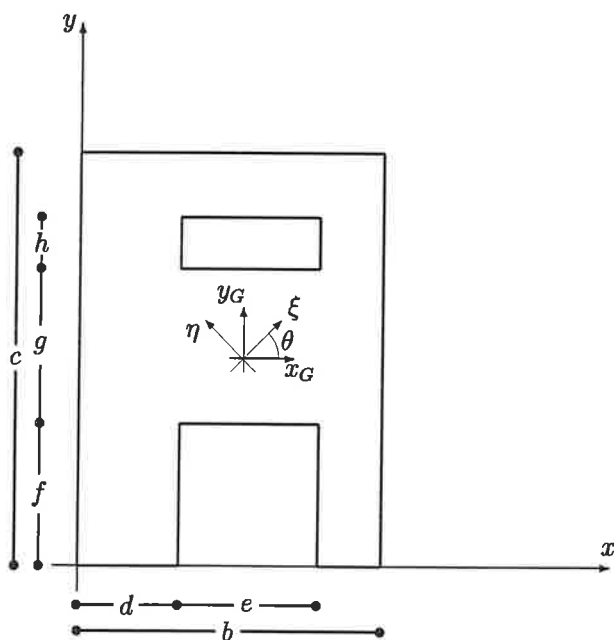
$$v_C = -2b\varphi_1 = -2b\varphi_2; u_A = -b\varphi_1;$$

$$M_B(\varphi) = 29b^2; v_C = 0; u_A = -b\varphi_1;$$

### Esercizio n. 3 (5 punti)

Per la lamina piana omogenea rappresentata in Figura (NB: Si noti che il disegno non è in scala!) nella quale le misure quotate sono le seguenti:  $b = 7a$ ;  $c = 6a$ ;  $d = 2a$ ;  $e = 3a$ ;  $f = 4a$ ;  $g = 2a$ ;  $h = 0$  si richiede di:

- calcolare i momenti statici,  $S_x$  e  $S_y$  (rispetto agli assi  $x$  e  $y$  indicati);
- calcolare le coordinate del baricentro  $x_G$  e  $y_G$  rispetto ai medesimi assi;
- calcolare i momenti di inerzia  $J_{xG}$  e  $J_{yG}$  e il momento centrifugo  $J_{xGyG}$  rispetto agli assi baricentrici;
- calcolare i momenti centrali d'inerzia,  $J_\xi = J_{\max}$  e  $J_\eta = J_{\min}$  rispetto agli assi centrali d'inerzia,  $\xi$ ,  $\eta$ ;
- calcolare la tangente trigonometrica,  $\tan 2\theta$ , del doppio dell'angolo  $\theta$  formato dagli assi  $x_G$  e  $\xi$ .



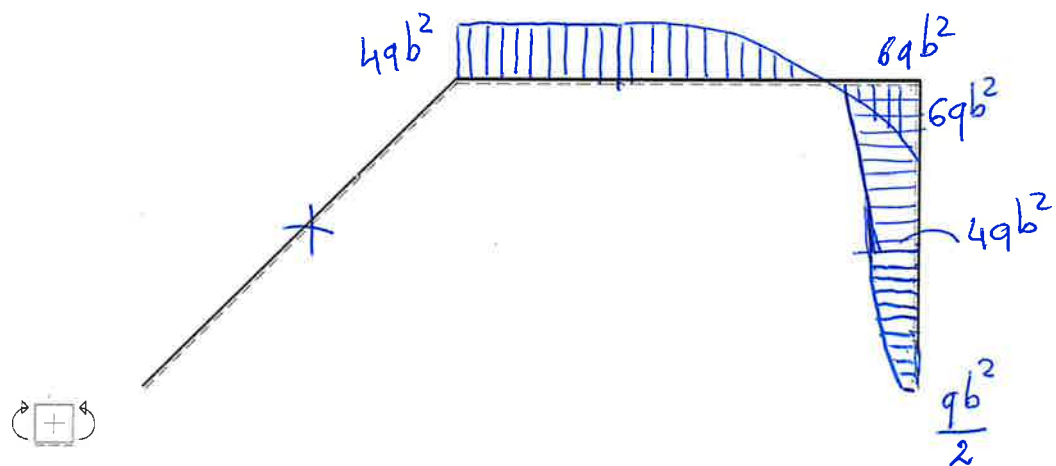
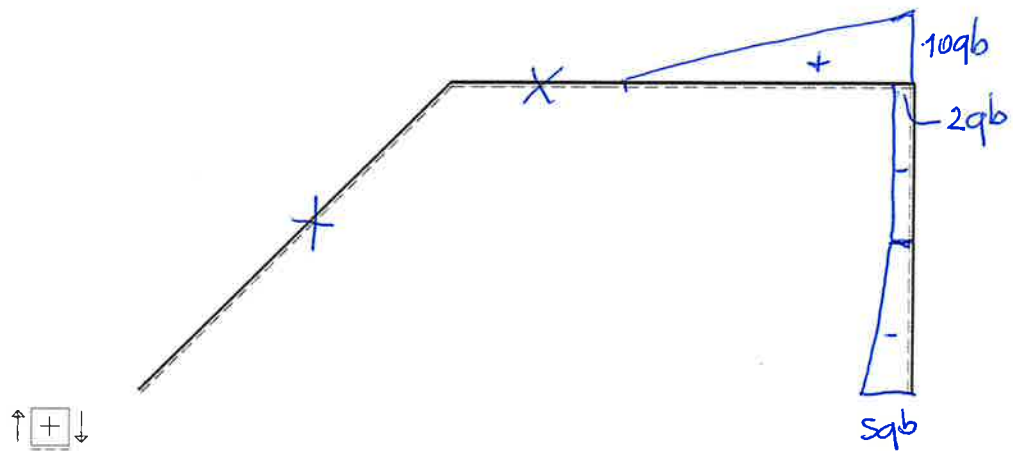
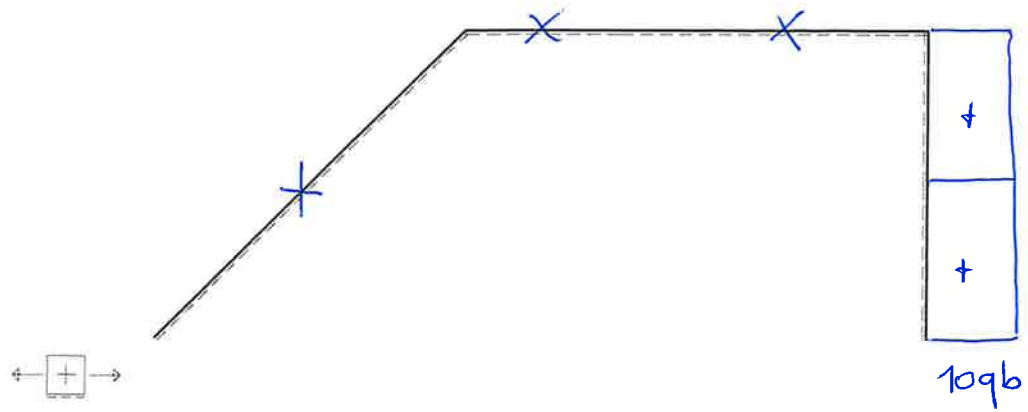
$$S_x = 102a^3; S_y = 105a^3;$$

$$x_G = 7/2 a = 3.5000a; y_G = 17/5 a = 3.4000a;$$

$$J_{xG} = 466/5 a^4 = 93.2000a^4; J_{yG} = 325/2 a^4 = 162.5000a^4;$$

$$J_{xGyG} = 0; \tan 2\theta = 0;$$

$$J_\xi = J_{\max} = 325/2 a^4; J_\eta = J_{\min} = 466/5 a^4;$$



$$\begin{aligned}
 H_A(\Rightarrow) &= 0; V_A(\uparrow) = 0; H_F(\Rightarrow) = 5qb; V_F(\uparrow) = -10qb; M_F(\curvearrowright) = \frac{1}{2} qb^2; \\
 N_{AB} &= 0; T_{AB} = 0; M_{AB} = 0; \\
 N_{BC} &= 0; T_{BC} = 0; M_{BC} = -4qb^2; \\
 N_{CD} &= 0; T_{CD} = 5qx_3; M_{CD} = -4qb^2 + \frac{5}{2} qx_3^2; \\
 N_{FE} &= 10qb; T_{FE} = -5qb + 3qx_4; M_{FE} = \frac{1}{2} qb^2 + 5qb x_4 - \frac{3}{2} qx_4^2; \\
 N_{ED} &= 10qb; T_{ED} = -2qb; M_{ED} = 4qb^2 + 2qb x_5;
 \end{aligned}$$



**CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI**

A.A. 2023-2024

Esame scritto del 01.07.2024

Parte 1 - Testo 3

*Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti. Esprimere i risultati in forma frazionaria o con almeno 3 cifre decimali.*

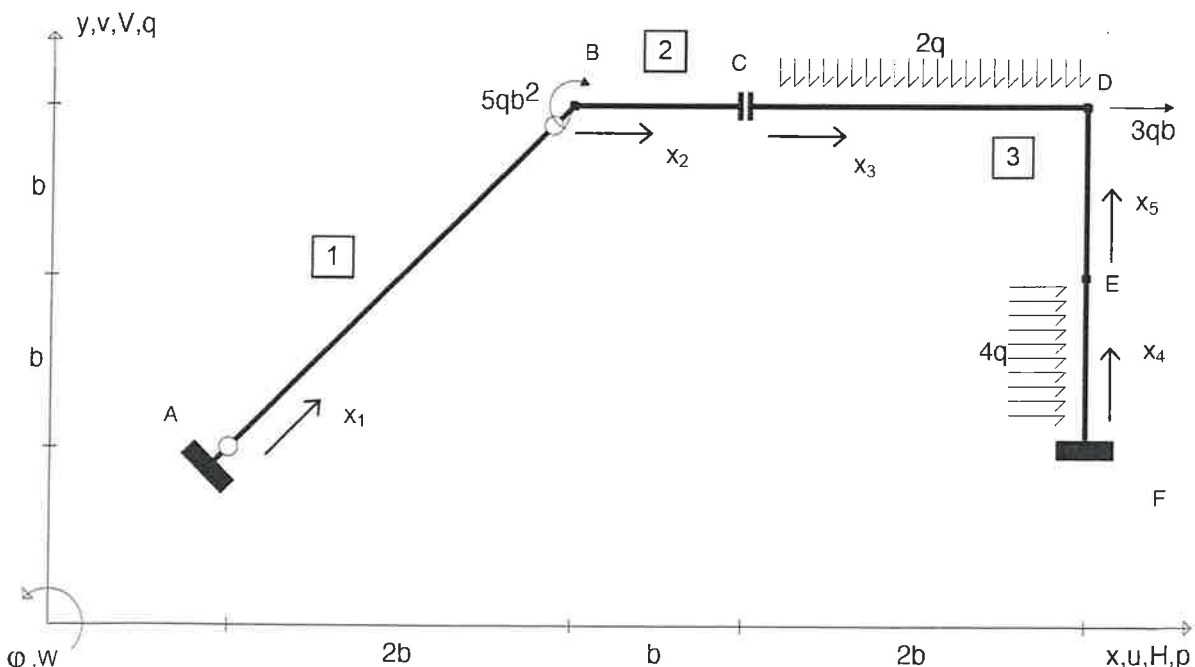
Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

**Esercizio n. 1 (17 punti)**

Risolvere la struttura isostatica riportata in Figura calcolando le reazioni vincolari, le equazioni delle azioni interne e tracciando nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici. Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC\_SdA 01.07.24\*003



Eq. ausiliarie

$$M_{z(B)}^{(1)} = 0 \quad \text{oppure} \quad M_{z(B)}^{(2+3)} = 0$$

$$R_y^{(1+2)} = 0 \quad \text{oppure} \quad R_y^{(3)} = 0$$

## Esercizio n. 2 (11 punti)

Per la struttura, indicata in Figura, determinare la reazione vincolare  $M_D$  applicando il principio dei lavori virtuali (PLV). Si richiede di

1. Determinare le coordinate (riferite all'origine in  $A$ ) del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 1 (asta  $ABC$ ),  $C_1$ , del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 2 (asta  $CD$ ),  $C_2$ , del centro di istantanea rotazione relativo fra i due corpi,  $C_{12}$ ;
2. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
3. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente verticale dello spostamento virtuale del punto  $C$ ,  $v_C$ , e quella orizzontale dello spostamento virtuale del punto  $A$ ,  $u_A$ .

Calcolare poi, riapplicando il PLV, il valore del momento flettente nel punto  $B$ ,  $M_B$ .

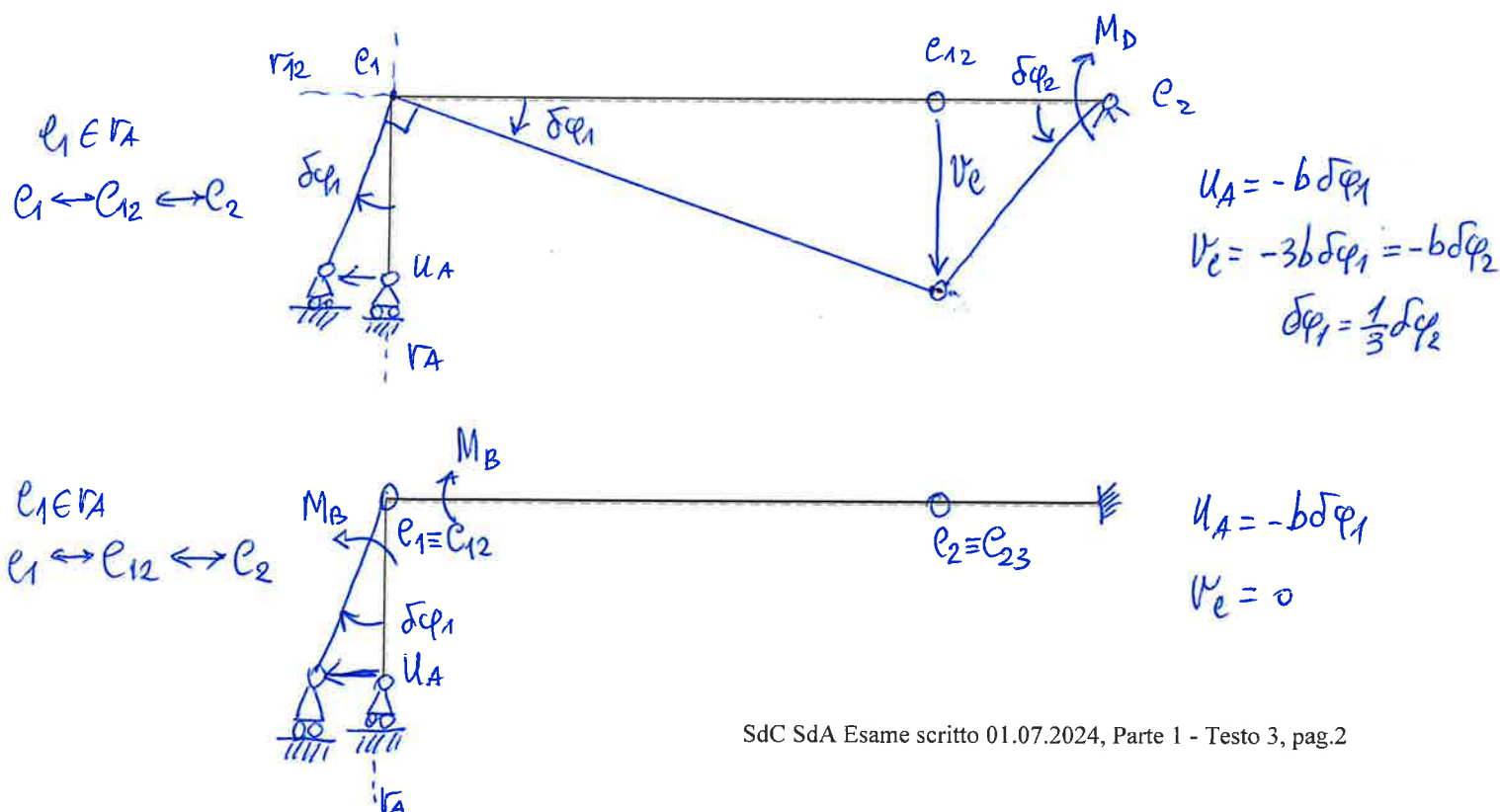
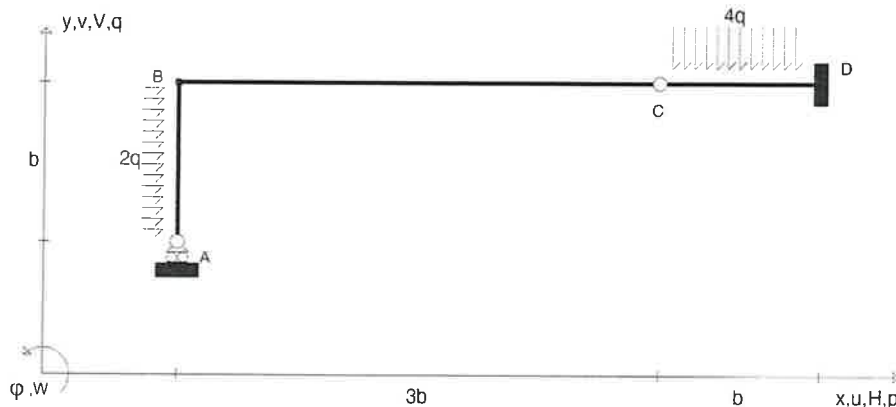
In questa situazione (nella quale la struttura è suddivisa nelle tre aste  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ) si richiede di:

4. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
5. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente verticale dello spostamento virtuale del punto  $C$ ,  $v_C$ , e quella orizzontale dello spostamento virtuale del punto  $A$ ,  $u_A$ .

Nota: Nel caso di punti impropri, si indichino le coordinate dei centri di rotazione in questa forma:  $(\infty, m)$ , dove  $m$  è il coefficiente angolare della retta a cui appartiene il punto improprio.

Universita' di Cagliari

SdC\_SdA 01.07.24\*006



$$M_D(\hat{\varphi}) = \frac{-5}{3}qb^2; C_1 = (0, b); C_2 = (4b, b); C_{12} = (3b, b);$$

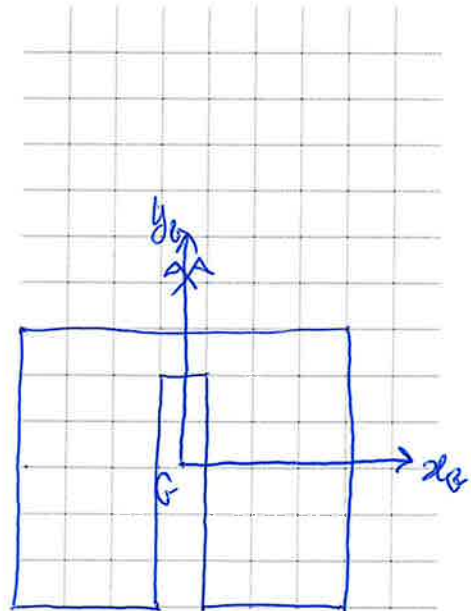
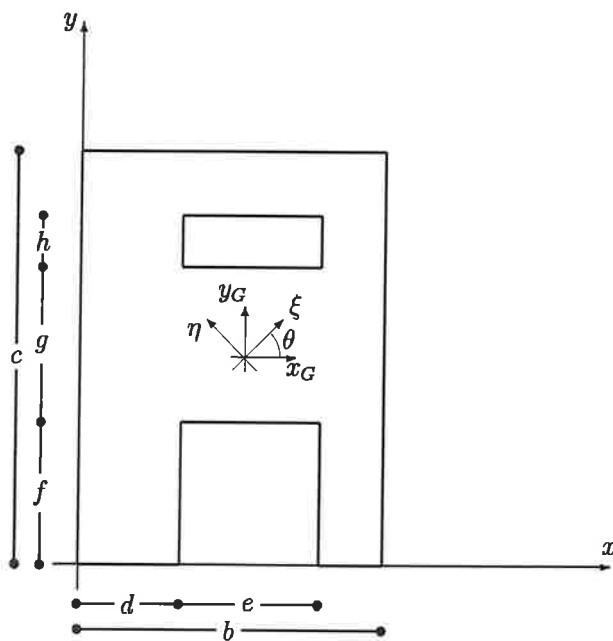
$$v_C = \frac{-3b\delta\varphi_1 - b\delta\varphi_2}{-b\delta\varphi_1}; u_A = \frac{-b\delta\varphi_1}{-b\delta\varphi_1};$$

$$M_B(\hat{\varphi}) = \frac{-qb^2}{0}; v_C = 0; u_A = \frac{-b\delta\varphi_1}{-b\delta\varphi_1};$$

### Esercizio n. 3 (5 punti)

Per la lamina piana omogenea rappresentata in Figura (NB: Si noti che il disegno non è in scala!) nella quale le misure quotate sono le seguenti:  $b = 7a$ ;  $c = 6a$ ;  $d = 3a$ ;  $e = a$ ;  $f = 5a$ ;  $g = a$ ;  $h = 0$  si richiede di:

- calcolare i momenti statici,  $S_x$  e  $S_y$  (rispetto agli assi  $x$  e  $y$  indicati);
- calcolare le coordinate del baricentro  $x_G$  e  $y_G$  rispetto ai medesimi assi;
- calcolare i momenti di inerzia  $J_{xG}$  e  $J_{yG}$  e il momento centrifugo  $J_{xGyG}$  rispetto agli assi baricentrici;
- calcolare i momenti centrali d'inerzia,  $J_\xi = J_{\max}$  e  $J_\eta = J_{\min}$  rispetto agli assi centrali d'inerzia,  $\xi$ ,  $\eta$ ;
- calcolare la tangente trigonometrica,  $\tan 2\theta$ , del doppio dell'angolo  $\theta$  formato dagli assi  $x_G$  e  $\xi$ .



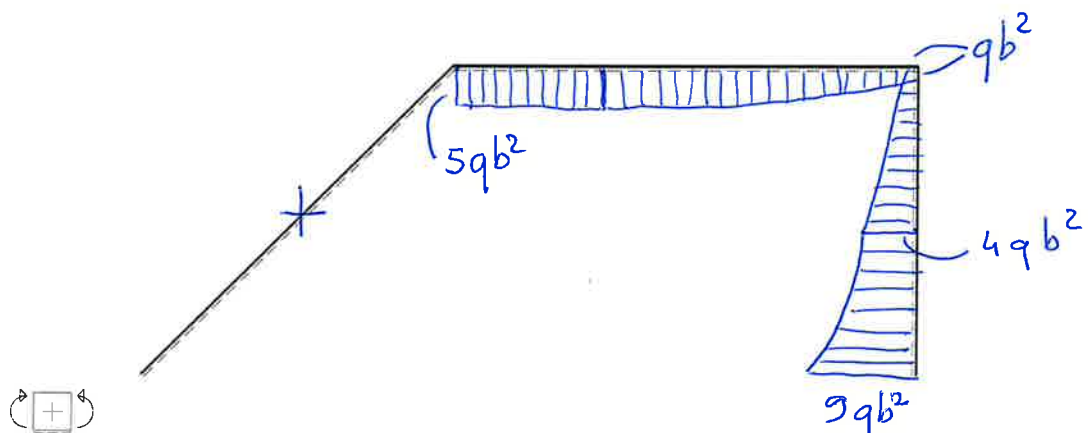
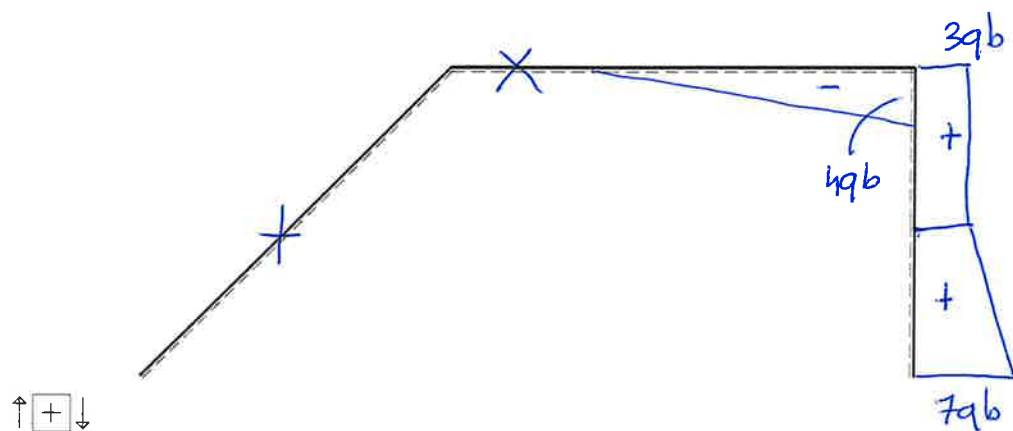
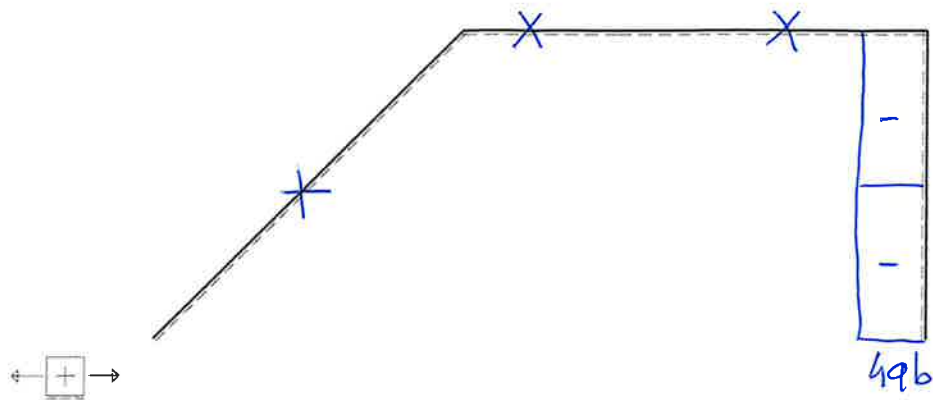
$$S_x = \frac{227}{2}a^3 = 113.5000a^3; S_y = \frac{259}{2}a^3 = 129.5000a^3;$$

$$x_G = \frac{7}{2}a = 3.5000a; y_G = \frac{227}{74}a = 3.0676a;$$

$$J_{xG} = \frac{50689}{444}a^4 = 114.1644a^4; J_{yG} = \frac{2053}{12}a^4 = 171.0833a^4;$$

$$J_{xGyG} = 0; \tan 2\theta = 0;$$

$$J_\xi = J_{\max} = \frac{2053}{12}a^4; J_\eta = J_{\min} = \frac{50689}{444}a^4;$$



$$\begin{aligned}
 H_A(\Rightarrow) &= 0; V_A(\hat{V}) = 0; H_F(\Rightarrow) = -7qb; V_F(\hat{V}) = 4qb; M_F(\hat{M}) = 9qb^2; \\
 N_{AB} &= 0; T_{AB} = 0; M_{AB} = 0; \\
 N_{BC} &= 0; T_{BC} = 0; M_{BC} = 5qb^2; \\
 N_{CD} &= 0; T_{CD} = -2qx_3; M_{CD} = 5qb^2 - qx_3^2; \\
 N_{FE} &= -4qb; T_{FE} = 7qb - 4qx_4; M_{FE} = 9qb^2 - 7qb \cdot x_4 + 2qx_4^2; \\
 N_{ED} &= -4qb; T_{ED} = 3qb; M_{ED} = 4qb^2 - 3qb \cdot x_5;
 \end{aligned}$$